

LIBRIS

We know
books

Anton Negrilă

Maria Negrilă

MATEMATICĂ

TEME RECAPITULATIVE

CLASA A VIII-A

EDIȚIA A II-A, REVIZUITĂ

Editura Paralela 45

CUPRINS

ALGEBRĂ	5
CAPITOLUL I. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}	7
I.1. Intervale de numere reale	7
I.2. Inecuații în \mathbb{R}	13
CAPITOLUL II. CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}	15
CAPITOLUL III. FUNCȚII	24
CAPITOLUL IV. ELEMENTE DE STATISTICĂ	30
GEOMETRIE	33
CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU	35
I.1. Puncte, drepte, plane: determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane. Paralelism: unghiul a două drepte, dreaptă paralelă cu planul, plane paralele	35
I.2. Perpendicularitate: dreaptă perpendiculară pe un plan, plane perpendiculare	39
I.3. Proiecții ortogonale. Unghi diedru. Teorema celor trei perpendiculare. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor studiate	43
CAPITOLUL II. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE	49
INDICAȚII ȘI SOLUȚII	59
NOTIȚELE ELEVULUI	83

1

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}

I.1. Intervale de numere reale

I.2. Inecuații în \mathbb{R}

2

CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}

3

FUNȚII

4

ELEMENTE DE STATISTICĂ

I.1. INTERVALE DE NUMERE REALE

1. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\};$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 1\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 2\};$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x < 3\};$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 7\};$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 0\}.$

2. Scrieți sub formă de interval mulțimile de mai jos care satisfac relațiile date:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3 \text{ și } x < 5\};$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \text{ și } x \geq 4\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5 \text{ și } x \leq 3\};$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \text{ și } x > -1\};$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4\};$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}.$

3. Scrieți sub formă de interval mulțimile de mai jos care satisfac relațiile date:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\};$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < 2\};$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \leq 5\};$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 3| < 7\};$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| \leq 5\}.$

4. Scrieți mulțimile de mai jos sub formă de interval:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < \frac{7x+12}{2} < 27\right\};$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \frac{4x+10}{2} < 13\right\};$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < \frac{4x+6}{2} \leq 9\right\};$

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq \frac{6x+10}{2} \leq 11\right\}.$

5. Scrieți mulțimile de mai jos sub formă de interval:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < \frac{5x+12}{2} < 16\right\};$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{6x+18}{6} \leq 8\right\};$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \frac{3x+7}{8} < 2\right\};$

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < \frac{7x+8}{4} \leq 9\right\};$

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq \frac{3x+8}{2} < 13\right\};$

f) $F = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -13 \leq \frac{4x-15}{3} \leq 7\right\}.$

6. Scrieți următoarele mulțimi sub formă de interval:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \leq 7\};$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 4| < 3\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 5\};$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 3| < 13\};$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 5| \leq 9\};$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 7| < 11\};$

g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 9| < 17\};$

h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| \leq 15\}.$

7. Scrieți următoarele mulțimi ca o reuniune de intervale:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2\};$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 4\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 6| > 4\};$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \geq 5\};$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 5| > 3\};$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \geq 6\};$

g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 3| > 9\};$

h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 5| \geq 11\};$

i) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 9| \geq 15\};$

j) $J = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 7| > 13\}.$

8. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{5x+3}{2} \right| \leq 6 \right\};$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{3x-5}{3} \right| < 3 \right\};$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{2x-3}{5} \right| \leq 3 \right\};$

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{4x+3}{3} \right| \leq 5 \right\};$

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{2x-1}{7} \right| < 1 \right\};$

f) $F = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{2x-5}{3} \right| < 5 \right\}.$

9. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{2x+5}{3} \leq 9 \right\};$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq \frac{x-5}{2} \leq 4 \right\};$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq \frac{2x-3}{3} < 3 \right\};$

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{3x+7}{2} \leq 11 \right\};$

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < \frac{5x+9}{8} < 3 \right\};$

f) $F = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -9 \leq \frac{5x+12}{2} \leq 16 \right\}.$

10. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{44 \cdot 45}, n \in \left(\frac{8}{9}; \frac{16}{15}\right);$

b) $a = \frac{1}{36 \cdot 37} + \frac{1}{37 \cdot 38} + \frac{1}{38 \cdot 39} + \dots + \frac{1}{89 \cdot 90}, a \in \left(\frac{1}{75}; \frac{1}{50}\right);$

c) $a = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{73 \cdot 75}, a \in \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right);$

d) $x = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{61 \cdot 64}, x \in \left(\frac{5}{16}; \frac{11}{32}\right).$

11. Efectuați:

a) $(-6; 4) \cup (-3; 5);$

b) $(-5; 3) \cup (-1; 4);$

c) $[-4; 3) \cup (-2; 5];$

d) $(-7; 4) \cup (-4; 6];$

e) $(-3; 2) \cup [2; 4);$

f) $(-5; 3] \cup (3; 4].$

12. Efectuați:

- a)** $(-5; 4) \cup \{-5, -4, -2, 0, 2, 3, 4, 5\}$; **b)** $(-3; 6) \cup \{-4, -3, -2, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
c) $(-4; 5) \cup \{-4, -3, -1, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$; **d)** $(-6; 3) \cup \{-7, -6, -5, -3, 2, 3, 4, 5\}$.

13. Efectuați:

- a)** $(-5; 4) \cap (-6; 3)$; **b)** $(-7; 2] \cap [-4; 4)$; **c)** $(-4; 5] \cap [-2; 7)$;
d) $[-3; 5) \cap [-1; 6)$; **e)** $(-8; 6] \cap (-4; 7)$; **f)** $[-6; 4) \cap [-1; 5]$.

14. Efectuați:

- a)** $(-4; 6) \cap \{-4, -3, -1, 1, 3, 5, 6\}$; **b)** $(-3; 5) \cap \{-3, -2, -1, 1, 3, 4, 5\}$;
c) $(-5; 4) \cap \{-5, -4, -1, 2, 3, 4\}$; **d)** $(-6; 4) \cap \{-6, -5, -4, -1, 2, 3, 4\}$;
e) $(-4; 2) \cap \{-4, -3, -2, 1, 2\}$.

15. Efectuați:

- a)** $(-2; 4] \cap \mathbb{Z}^*$; **b)** $(-3; 2) \cap \mathbb{Z}^*$; **c)** $(-4; 3) \cap \mathbb{Z}$;
d) $(-3; 2) \cap \mathbb{N}^*$; **e)** $(-1; 1) \cap \mathbb{Z}^*$; **f)** $[-2; 2) \cap \mathbb{N}^*$;
g) $(-2; 4) \cap \mathbb{N}^*$; **h)** $(-2; 2) \cap \mathbb{Z}^*$; **i)** $(-3; 3) \cap \mathbb{N}^*$.

16. Efectuați:

- a)** $A \cap \mathbb{Z}^*$, unde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 3\}$; **b)** $A \cap \mathbb{N}^*$, unde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\}$;
c) $A \cap \mathbb{Z}^*$, unde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$; **d)** $(-2; 2] \cap [2; 4)$;
e) $[-3; 4) \cap [4; 5)$; **f)** $(-4; 5) \cap (-2; 6) \cap \mathbb{Z}^*$.

17. Determinați cel mai mare număr întreg din intervalul:

- a)** $(-\infty; 4,6)$; **b)** $(-\infty; -3,2)$; **c)** $(-3,1; 5,4)$; **d)** $(-3; 5,28)$;
e) $(-\infty; 2)$; **f)** $(-\infty; 3)$; **g)** $(2,5; 4,8)$; **h)** $(-\infty; -7)$.

18. Determinați cel mai mic număr întreg din intervalul:

- a)** $(-4,3; +\infty)$; **b)** $(5,6; +\infty)$; **c)** $(-4,6; 2,8)$; **d)** $(-7,2; -1,2)$;
e) $(-5; -1)$; **f)** $(-3; 3,4)$; **g)** $(-8,6; -2,4)$; **h)** $(-2; 2]$.

19. Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval și calculați $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$, în fiecare dintre cazurile de mai jos:

- a)** $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -11 \leq \frac{7x+13}{2} < 17 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -4 < \frac{5x+12}{2} \leq 21 \right\}$;
b) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq \frac{6x+18}{8} < 6 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -5 < \frac{9x+16}{4} \leq 22 \right\}$;
c) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -10 < \frac{7x+9}{4} < 11 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -8 < \frac{5x+13}{4} < 7 \right\}$;
d) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq \frac{4x+6}{2} < 13 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -5 < \frac{6x+10}{4} \leq 4 \right\}$.

20. Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval și calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -11 \leq \frac{3x-7}{2} < 1 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -8 < \frac{5x+6}{3} \leq 7 \right\}$;

b) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < \frac{5x+9}{8} < 3 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{7x+18}{3} < 20 \right\}$;

c) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq \frac{5x+12}{4} \leq 8 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{7x+12}{9} < 6 \right\}$.

21. Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval și calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-3| \leq 9\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+7| < 3\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+7| \geq 5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+5| < 11\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-9| > 17\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+1| > 5\}$;

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+3| \geq 11\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+7| \geq 17\}$;

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-5| \geq 13\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+3| < 19\}$.

22. Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval și calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-7| < 19\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-9| \leq 23\}$;

b) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+1)^2} \leq 19 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+5)^2} < 17 \right\}$;

c) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-11)^2} \leq 7 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-5)^2} < 9 \right\}$;

d) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+7)^2} < 15 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-3)^2} \leq 21 \right\}$;

e) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+1)^2} \leq 17 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-7)^2} \leq 15 \right\}$.

23. Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval și calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+7| \geq 15\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-5| > 9\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+1| > 7\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+3| \geq 11\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-3| > 15\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+7| > 19\}$.

24. Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval și calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-9)^2} \leq 17 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+7)^2} \leq 19 \right\}$;

b) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-7)^2} < 13 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+9)^2} < 15 \right\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-5)^2} \geq 13\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+3)^2} > 17\}$;

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-3)^2} \geq 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+5)^2} > 11\}$.

25. Determinați elementele mulțimilor:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid ||x-3|-5| \leq 1\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid ||2x-1|-9| \leq 2\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid ||2x+3|-12| < 2\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid ||2x+5|-17| < 4\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid ||2x-7|-15| \leq 6\}$;

f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid ||2x+9|-13| < 3\}$.

26. Scrieți sub formă de interval mulțimile de mai jos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| \cdot (3-|x+2|) > 0\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \cdot (4-|x-2|) > 0\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \cdot (7-|2x-11|) > 0\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| \cdot (9-|2x+3|) > 0\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2-4| \cdot (7-|2x+1|) > 0\}$;

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2-1| \cdot (11-|2x-7|) > 0\}$.

27. Determinați elementele mulțimilor:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ||2x-3|-5| \cdot |x+2| \leq 0\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid ||2x+7|-9| \cdot |x-3| \leq 0\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid ||x-4|-6| \cdot |x^2-1| \leq 0\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid ||x+5|-8| \cdot |x-2| \leq 0\}$.

28. Comparați numerele reale x și y pentru care avem:

a) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0$.

29. Stabiliți cărui interval aparțin numerele reale a, b, c pentru care $4(a^2 + b^2 + c^2) = 4(3b + 5c - a) + 14$.

30. Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \in (-7; 5)$. Arătați că numărul $x = \sqrt{(a+7)^2} + \sqrt{(a-5)^2}$ este natural.

31. Se consideră numărul real x , astfel încât $x \in (-12; 4)$. Arătați că numărul a este un număr întreg, unde

$$a = \sqrt{(x+12)^2} - \sqrt{(x-4)^2} + 2 \cdot |x-7|.$$

32. Se consideră numerele reale a și b pentru care $a \in (-3; 1)$ și $b \in (-2; 4)$. Arătați că numărul

$$n = \sqrt{(a+b-6)^2} + \sqrt{(a+b+5)^2}$$
 este natural.

33. Se consideră numerele reale x și y pentru care $x \in (-2; 3)$ și $y \in (-1; 4)$. Arătați că numărul

$$n = \sqrt{(x+y+3)^2} + \sqrt{(x+y-7)^2}$$
 este natural.

34. Se consideră numerele reale a și b pentru care $a \in (-3; 4)$ și $b \in (-5; 2)$. Arătați că numărul

$$n = \sqrt{(a+b-6)^2} - \sqrt{(a+b-9)^2}$$
 este număr întreg negativ.

35. Stabiliți cărui interval aparțin numerele reale din egalitățile de mai jos:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + 2(a-2b-3c) = 11$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 + 52 = 4(a+2b+3c)$;

c) $2(x^2 + y^2 + z^2) = 7 + 2(x+3y+5z)$;

d) $a^2 + b^2 + c^2 + 2(a+3b+5c) + 26 = 0$;

e) $a^2 + b^2 + c^2 = a + 3b + 5c - 7,75$;

f) $x^2 + y^2 + z^2 = 2(3x+5y+7z) - 79$.

36. Dacă a și b sunt două numere reale pentru care $3a^2 + 3b^2 - 2a - 14b + \frac{46}{3} = 0$, atunci stabiliți cărui interval aparține numărul real $a + b$.

37. Se consideră numerele reale x și y pentru care $x \in (-2; 2)$ și $y \in (-4; 5)$. Calculați valoarea expresiei $E = \sqrt{(x+y-7)^2} - \sqrt{(x-y-7)^2} + \sqrt{(2x+y+9)^2} + \sqrt{(2x-y-9)^2}$.

38. Fie x și y două numere reale pentru care $x \in (-2; 2)$ și $y \in (-3; 5)$. Arătați că numărul $A = \sqrt{(x+y-7)^2} - \sqrt{(x-y+7)^2} + \sqrt{(x+y+5)^2} - \sqrt{(x-y-5)^2}$ are o valoare constantă.

39. Fie x și y două numere reale pentru care $x \in (2; 4)$ și $y \in (-4; 2)$. Calculați valoarea numărului $n = \sqrt{(2x+y-10)^2} + \sqrt{(x+2y+6)^2} + |x-y|$.

40. Fie x și y două numere reale, astfel încât $x \in (2; 3)$ și $y \in (-4; 2)$. Arătați că valoarea numărului $n = \sqrt{(3x-2y+10)^2} + \sqrt{(-2x+3y+18)^2} - |x+y+6|$ reprezintă un număr natural.

41. Fie x și y două numere reale pentru care $x \in (2; 4)$ și $y \in (-4; 2)$. Arătați că numărul $n = \sqrt{(2x+y)^2 - 20(2x+y) + 100} + \sqrt{(x+2y)^2 + 12(x+2y) + 36} + |x-y|$ are o valoare constantă.

42. Se consideră numerele reale x și y pentru care $x \in (-1; 1)$ și $y \in (-3; 4)$. Calculați valoarea expresiei:

$$E = \sqrt{(x+y)^2 - 10(x+y) + 25} + \sqrt{(2x+y)^2 + 10(2x+y) + 25} - \sqrt{(x-y)^2 - 8(x-y) + 16} + \sqrt{(2x-y)^2 - 10(2x-y) + 25}.$$

43. Fie x și y două numere reale, astfel încât $x \in (-1; 1)$ și $y \in (-2; 2)$. Calculați valoarea numărului:

$$A = \sqrt{(x+y)^2 - 8(x+y) + 16} + \sqrt{(x+y)^2 + 10(x+y) + 25} - \sqrt{(x-y)^2 - 6(x-y) + 9} - \sqrt{(x-y)^2 + 8(x-y) + 16}.$$

44. Se consideră numerele reale a și b pentru care $a - 7b = -3$ și $a \in (-3; 4)$. Arătați că valoarea numărului real $A = \sqrt{a^2 + b^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 + b^2 - 8a - 2b + 17}$ este egală cu $5\sqrt{2}$.

45. Se consideră numerele reale x, y, z pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$. Determinați valorile numerelor reale x, y, z , știind că $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$.

46. Se consideră numerele reale x și y pentru care $y - x = 2$ și $y \in (2; +\infty)$. Arătați că expresia:

$$E = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} - \sqrt{x^2 + y^2 + 2(x-y+1)}$$

are o valoare constantă.

47. Se consideră numerele reale a și b pentru care $a = b - 1$ și $b \in (1; 3)$. Arătați că expresia:

$$E = \sqrt{a^2 + 1 + b^2 - 2b} + \sqrt{a^2 + b^2 - 6b - 4a + 13}$$

are o valoare care nu depinde de a și de b .

48. Se consideră numerele reale x și y pentru care $x \in (-2; 1)$ și $x - 3y = -2$. Determinați valoarea numărului real p , unde $p = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$.
49. Dacă numerele reale a și b satisfac condițiile $a \in (-2; 3)$ și $a - 5b = -2$, atunci arătați că expresia $E = \sqrt{a^2 + 2b^2 + 4a + 4} + \sqrt{a^2 + 2b^2 - 6a - 4b + 11}$ are o valoare constantă.
50. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ și intervalele $A = (2a - 4; 3b - 8)$ și $B = (4b - 15; 3a - 1)$.
- a) Determinați numerele întregi a și b astfel încât $2 \in A \cap B$.
- b) Pentru a și b determinate la punctul a) calculați $A \cap B \cap \mathbb{N}$.
51. Determinați numerele a și b pentru care $a + b \leq 4\sqrt{a-4} + 6\sqrt{b-9}$.
52. Fie x și y două numere reale pentru care $x, y \in (1; 3)$. Arătați că $xy - 2x - 2y + 5 > 0$.
53. Determinați numerele reale x și y pentru care $x + y \leq 6\sqrt{x-9} + 8\sqrt{y-16}$.
54. Fie a și b două numere reale pentru care $a, b \in (3; 5)$. Arătați că $ab - 4a - 4b + 17 > 0$.

I.2. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

- a) $8(1-x) + 7x - 10 < 2(7-x) - 9$; b) $2(x+5) + 15 \geq 6(2x+1) + 9$;
 c) $4(x+5) + 6(2-x) \geq 3x - 8$; d) $11 - 7x + 2(1-x) + 3x \geq 5(3-x) - 7$;
 e) $4x + 6(x+2) \leq 36 + 2(2x+3)$; f) $9x + 33 > 3(2x+3) + 3(3x+2)$;
 g) $5(2x-1) + 3(x+1) + 2(3-5x) \leq 7(2-2x) + 2(3x+6)$;
 h) $5(3x-7) + 28 \leq 3(2x-13) + 4(2x+9)$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

- a) $4(2x+3) + 3(3x+2) > 5(3x+8) - 6$; b) $3(2x-5) + 2(x-3) \geq 3(x-2) - 5$;
 c) $3(2x-1) - 2(3-4x) + 7 > 6(2x+7) - 24$; d) $6(5x-4) \geq 7(3x+7) - 2(8-3x) - 36$;
 e) $3(6x-5) - 2(4x+13) + 5 \geq 5(4-x) - 26$; f) $2(3x+4) - 5(2x-3) + 7 > 7(x-1) + 4$;
 g) $5(2x-3) + 3(5x-6) + 13 < 8(3x+7) - 63$; h) $7(4x-3) - 4(3x+8) + 25 \leq 3(4x+9) - 43$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

- a) $3(4x-5) - 3(2x+7) + 32 > 2(2x+1) - 14$; b) $2(5x-3) + 4x - 3(7-2x) < 5(3x+1) + 8$;
 c) $3(2x-1) - 5(x+1) - 15 \geq 35 - 4(x+2)$; d) $5(3x+4) - 7(4x+9) + 47 \leq 28 - 3(5x+6)$;
 e) $4(x+3) - 3(2x+3) > 7(x+4) - 15(x+1) + 8$;
 f) $5(2x-3) - 3(2x+1) - 48 \geq 4(x+3) - 4(4x+7) + 30$;
 g) $5(3x+14) - 4(5x+12) - 15 \leq 2(x+38) - 4(2x+13) - 11$;
 h) $9(4x-3) - 7(3x+5) > 5(3x+10) - 4(2x+15) - 4$.